Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Comunidad Valenciana 2017,
Convocatoria ordinaria

mentoor.es

Problema A.1. Álgebra

Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \boldsymbol{-x+ay+2z=a} \\ \boldsymbol{2x+ay-z=2} \\ \boldsymbol{ax-y+2z=a} \end{cases}$ **dependiente del parámetro real a.**

Obtener razonadamente:

a) **La solución del sistema cuando a=2.**
b) **Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado.**
c) **El valor del parámetro a para el que el sistema es compatible e indeterminado y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a.**

Solución:

b) **Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado.** (Se responde primero a este apartado para facilitar la discusión global del sistema).

Un sistema es Compatible Determinado (S.C.D.) si el determinante de la matriz de coeficientes (A) es no nulo.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & a & -1 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -1(2a-1) - a(4-(-a)) + 2(-2-a^2) = -2a+1-4a-a^2-4-2a^2 = -3a^2-6a-3$$

$$|A| = -3(a^2+2a+1) = -3(a+1)^2$$

El determinante se anula si $|A| = 0 \iff -3(a+1)^2 = 0 \iff a = -1$.
Por lo tanto, el sistema es S.C.D. para cualquier valor de a excepto $a = -1$.

$$\boxed{\textbf{El sistema es Compatible Determinado para todo } \boldsymbol{a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}}.}$$

a) **La solución del sistema cuando a=2.**

Para a=2, el sistema es S.C.D. ya que $2 \neq -1$. El determinante es $|A| = -3(2+1)^2 = -27$.
Usamos la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{0}{-27} = 0, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{18}{-27} = -\frac{2}{3}$$

$$\boxed{\textbf{La solución es } \boldsymbol{(x,y,z) = (2/3, 0, -2/3)}.}$$

c) **El valor del parámetro a para el que el sistema es compatible e indeterminado y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a.**

El sistema puede ser compatible indeterminado (S.C.I.) si $a = -1$. Estudiamos los rangos.
Para $a = -1$: $|A| = 0$, $\text{Rg}(A) < 3$. Como $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, $\text{Rg}(A) = 2$.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

La 1ª y 3ª fila son idénticas, por lo que el rango de A* no puede ser 3. Por tanto, $\text{Rg}(A^*) = 2$.
Como $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < 3$, el sistema es S.C.I. para $a = -1$.

Resolvemos el sistema equivalente: $\begin{cases} -x - y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = 2 \end{cases}$. Sea $z = \lambda$.

Restando (Ec1-Ec2): $-3x + 3z = -3 \implies -x + z = -1 \implies x = z + 1 = \lambda + 1$.
Sustituyendo en la 1ª: $-(\lambda + 1) - y + 2\lambda = -1 \implies -\lambda - 1 - y + 2\lambda = -1 \implies y = \lambda$.

$$\boxed{\textbf{Para a=-1, la solución es } \boldsymbol{(x, y, z) = (\lambda + 1, \lambda, \lambda)}, \forall \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Problema A.2. Geometría

Se dan el punto P(1,1,1), la recta $\boldsymbol{r : \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}}$ **y el plano** $\boldsymbol{\pi : x+y+z=1}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilitzado, las ecuaciones correspondientes a:

a) **El plano que contiene al punto P y a la recta r.**
b) **La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano** $\boldsymbol{\pi}$**, la distancia del punto P al plano y el punto de intersección de la recta s con el plano** $\boldsymbol{\pi}$.
c) **El plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano** $\boldsymbol{\pi}$.

Solución:

a) **El plano que contiene al punto P y a la recta r.**

Para definir el plano que contiene a P y r, necesitamos un punto de r y su vector director.
De r, restando las ecs: $y-2=0 \implies y=2$.
Sustituyendo: $x+2-z+1=0 \implies z=x+3$. Si $x=0, z=3$. Punto $P_r(0,2,3)$.
El vector director de r es:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1,0,1)$$

El plano buscado, π', pasa por P(1,1,1) y tiene como vectores directores $\vec{v}_r=(1,0,1)$ y $\vec{PP_r}=(-1,1,2)$.

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies -x-3y+z+3=0$$

$$\boxed{\boldsymbol{x+3y-z-3=0.}}$$

b) **La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano** $\boldsymbol{\pi}$**, la distancia del punto P al plano y el punto de intersección de la recta s con el plano** $\boldsymbol{\pi}$.

La recta s pasa por P(1,1,1) y es perpendicular a π, por lo que su vector director es el normal del plano, $\vec{v}_s=\vec{n}_\pi=(1,1,1)$.

$$s:(x,y,z)=(1,1,1)+\lambda(1,1,1)$$

La distancia de P a π:

$$d(P,\pi)=\frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

El punto de intersección M se halla sustituyendo s en π:
$(1+\lambda)+(1+\lambda)+(1+\lambda)=1 \implies 3\lambda+3=1 \implies \lambda=-2/3$.

$$M=(1-2/3,1-2/3,1-2/3)=(1/3,1/3,1/3)$$

$$\boxed{\boldsymbol{s:x-1=y-1=z-1}, \quad d=\frac{\boldsymbol{2\sqrt{3}}}{\boldsymbol{3}}, \quad M=\boldsymbol{(1/3,1/3,1/3)}.}$$

c) El plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

El plano buscado, π'', pasa por $P_r(0,2,3)$ y tiene como vectores directores a $\vec{v}_r = (1,0,1)$ y al normal de π, $\vec{n}_\pi = (1,1,1)$.
El vector normal del plano π'' es:

$$\vec{n}_{\pi''} = \vec{v}_r \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,0,1)$$

La ecuación del plano es $-x+z+D=0$. Como pasa por $P_r(0,2,3)$:
$-0+3+D=0 \implies D=-3$.

$$\boxed{\boldsymbol{x-z+3=0}}.$$

Problema A.3. Análisis

Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m. más abajo... Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que M=(0,6), P=(x,0) y N=(18,0). El precio del cable MP es de 10 €/m. El precio del cable PN es de 5 €/m. Obtener razonadamente:

a) **El coste total C de los dos cables en función de la abscisa x del punto P, cuando $0 \leq x \leq 18$.**
b) **El valor de x, con $0 \leq x \leq 18$, para el que el coste total C es mínimo.**
c) **El valor de dicho coste total mínimo.**

Solución:

a) **El coste total C de los dos cables en función de la abscisa x del punto P, cuando $0 \leq x \leq 18$.**
Distancia MP:
$$d_{MP} = \sqrt{(x-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{x^2+36}$$
Distancia PN:
$$d_{PN} = \sqrt{(18-x)^2 + (0-0)^2} = 18 - x$$
Coste:
$$C(x) = 10 \cdot d_{MP} + 5 \cdot d_{PN} = 10\sqrt{x^2+36} + 5(18-x)$$
$$\boxed{\boldsymbol{C(x) = 10\sqrt{x^2+36} + 90 - 5x.}}$$

b) **El valor de x, con $0 \leq x \leq 18$, para el que el coste total C es mínimo.**
Derivamos para optimizar:
$$C'(x) = 10\frac{2x}{2\sqrt{x^2+36}} - 5 = \frac{10x}{\sqrt{x^2+36}} - 5$$
$C'(x) = 0 \implies 10x = 5\sqrt{x^2+36} \implies 2x = \sqrt{x^2+36}.$
$4x^2 = x^2 + 36 \implies 3x^2 = 36 \implies x^2 = 12 \implies x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$
$2\sqrt{3} \approx 3.46 \in [0, 18]$. Estudiamos la monotonía:

Intervalo	$(0, 2\sqrt{3})$	$(2\sqrt{3}, 18)$
Signo $C'(x)$	-	+
$\boldsymbol{C(x)}$	Decreciente ↘	Creciente ↗

Hay un mínimo en $x = 2\sqrt{3}$.
$$\boxed{\boldsymbol{x = 2\sqrt{3}}\ \textbf{metros.}}$$

c) **El valor de dicho coste total mínimo.**
$$C(2\sqrt{3}) = 10\sqrt{12+36} + 90 - 5(2\sqrt{3}) = 10\sqrt{48} + 90 - 10\sqrt{3}$$
$$= 10(4\sqrt{3}) + 90 - 10\sqrt{3} = 40\sqrt{3} + 90 - 10\sqrt{3} = 90 + 30\sqrt{3}$$
$$\boxed{\textbf{El coste mínimo es } \boldsymbol{90 + 30\sqrt{3} \approx 141.96}\ \textbf{euros.}}$$

Problema B.1. Álgebra

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) **La comprobación de que $\boldsymbol{C^2 = 2C - I}$, siendo $\boldsymbol{C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}}$ e I la matriz identidad de orden 3x3, y el cálculo de la matriz $\boldsymbol{C^4}$.**

b) **El valor del determinante de la matriz $\boldsymbol{(3A^4)(4A^2)^{-1}}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1.**

c) **La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad BB=B.**

Solución:

a) **La comprobación de que $\boldsymbol{C^2 = 2C - I}$ y el cálculo de la matriz $\boldsymbol{C^4}$.**

$$C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2C - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Se comprueba que $C^2 = 2C - I$.
$C^4 = (C^2)^2 = (2C - I)^2 = 4C^2 - 4C + I = 4(2C - I) - 4C + I = 8C - 4I - 4C + I = 4C - 3I$.

$$\boxed{\boldsymbol{C^4 = 4C - 3I = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}}.}$$

b) **El valor del determinante de la matriz $\boldsymbol{(3A^4)(4A^2)^{-1}}$**... A es de orden 4, $|A| = -1$.

$$\det((3A^4)(4A^2)^{-1}) = \det(3A^4)\det((4A^2)^{-1}) = (3^4|A|^4)\frac{1}{\det(4A^2)}$$

$$= (81(-1)^4)\frac{1}{4^4|A|^2} = 81 \cdot \frac{1}{256(-1)^2} = \frac{81}{256}$$

$$\boxed{\textbf{El determinante es 81/256.}}$$

c) **La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad BB=B.**
Si $B^2 = B$ y B admite inversa B^{-1}:
$B^{-1}B^2 = B^{-1}B \implies (B^{-1}B)B = I \implies IB = I \implies B = I$.

$$\boxed{\textbf{La única matriz es la identidad, B=I.}}$$

Problema B.2. Geometría

Sea T un tetraedro de vértices O(0,0,0), A(1,1,1), B(3,0,0) y C(0,3,0). Obtener razonadamente:

a) **La ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C, y las ecuaciones de la recta h_o perpendicular a π que pasa por O.**
b) **El punto de intersección de la altura h_o y el plano π.**
c) **El área de la cara cuyos vértices son los puntos A, B y C, y el volumen del tetraedro T.**

Solución:

a) **La ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C, y las ecuaciones de la recta h_o perpendicular a π que pasa por O.**.
$\vec{AB} = (2,-1,-1), \vec{AC} = (-1,2,-1)$. $\vec{n}_\pi = \vec{AB} \times \vec{AC} = (3,3,3)$, usamos $(1,1,1)$.
Plano π: $x+y+z+D=0$. Pasa por B: $3+0+0+D=0 \implies D=-3$. $\pi : x+y+z-3=0$.
Recta h_o: pasa por O y $\vec{v}_{h_o} = \vec{n}_\pi = (1,1,1)$. $h_o : (x,y,z) = \lambda(1,1,1)$.

$$\boxed{\textbf{Plano: } \boldsymbol{x+y+z-3=0}. \textbf{ Recta: } \boldsymbol{x=y=z}.}$$

b) **El punto de intersección de la altura h_o y el plano π.**
Sustituimos la recta $x=\lambda, y=\lambda, z=\lambda$ en el plano: $\lambda+\lambda+\lambda-3=0 \implies 3\lambda=3 \implies \lambda=1$.
El punto es $(1,1,1)$, que es el punto A.

$$\boxed{\textbf{El punto de intersección es (1,1,1).}}$$

c) **El área de la cara cuyos vértices son los puntos A, B y C, y el volumen del tetraedro T.**

$$\text{Área(ABC)} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}|(3,3,3)| = \frac{1}{2}\sqrt{9+9+9} = \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Volumen(T)} = \frac{1}{6}|\det(\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC})| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|1(0)-1(0)+1(9)| = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\textbf{Área} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \textbf{ u}^{\mathbf{2}}. \textbf{ Volumen} = \boldsymbol{\frac{3}{2}} \textbf{ u}^{\mathbf{3}}.}$$

Problema B.3. Análisis

Dada la función f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ para cualquier valor real $x \neq 0$, se pide obtener razonadamente:

a) **Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f, y los extremos relativos de la función f.**

b) **Las asíntotas de la curva $y = f(x)$.**

c) **El área de la región plana limitada por la curva $y = \frac{x^2+1}{x}$, el segmento que une los puntos (1,0) y (e,0), y las rectas x=1 y x=e.**

Solución:

a) **Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f, y los extremos relativos de la función f.**

$f(x) = x + 1/x$.

$$f'(x) = 1 - 1/x^2 = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$. El signo de la derivada depende del numerador.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

Máximo relativo en $x = -1$, $f(-1) = -2$. Mínimo relativo en $x = 1$, $f(1) = 2$.

Crece: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Decrece: $(-1, 0) \cup (0, 1)$. Máx: (-1,-2), Mín: (1,2).

b) **Las asíntotas de la curva $y = f(x)$.**

A. Vertical: El denominador se anula en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{0} = \pm\infty \implies \text{A.V. en } x = 0$$

A. Oblicua: como $f(x) = x + 1/x$, y $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} 1/x = 0$, la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

A. Vertical: $x = 0$. A. Oblicua: $y = x$.

c) **El área de la región plana limitada por la curva, el eje x entre 1 y e.**

La región está limitada por $y = f(x)$, $y = 0$ (eje de abscisas), $x = 1$ y $x = e$. En el intervalo $[1, e]$, la función es positiva.

$$\text{Área} = \int_1^e (x + \frac{1}{x})dx = \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right]_1^e$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} + \ln(e) \right) - \left(\frac{1}{2} + \ln(1) \right) = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{e^2 + 1}{2}$$

$$\boxed{\textbf{El área es } \boldsymbol{\frac{e^2+1}{2}} \textbf{ unidades cuadradas.}}$$